

LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES: UN ACERCAMIENTO AL PROBLEMA DE UN MILLON DE DOLARES

Johan Manuel Zúñiga

Departamento de Física, Universidad del Cauca

Todo en el Universo está en constante movimiento. El filósofo griego Heráclito de Éfeso ya en el siglo V a. C. afirmaba que “nadie se baña dos veces en el mismo río” metaforizando de este modo el hecho de que la Naturaleza está en constante cambio, es decir, todos los sistemas de alguna u otra manera evolucionan en el tiempo. Estos cambios, estos movimientos no caprichosos y gobernados mediante elegantes leyes matemáticas, son los que dan lugar a una gran cantidad de interacciones entre las diferentes partes del Universo permitiendo así que en la Naturaleza se presenten fenómenos cada vez más complejos que el sonido, la electricidad, la radiación o la gravedad misma; la vida y el pensamiento.

La descripción cinemática y dinámica del movimiento de sistemas físicos ha permitido al ser humano la comprensión y transformación de su entorno a lo largo de la historia. Se estudia el movimiento como un fenómeno fundamental para la estabilidad de los diversos sistemas que conforman el Universo y muchos han sido los métodos utilizados para su estudio, desde subjetivos planteamientos filosóficos hasta elaboradas teorías de la física y la matemática. Hoy en día, y gracias a los refinados métodos de comprobación experimental, se cuenta con un amplio conjunto de modelos fisicomatemáticos para descripción de fenómenos naturales tales como la radiación, la electricidad y el magnetismo, la gravitación, las ondas, las partículas fundamentales, entre otros. Sin embargo, y pese a muchos esfuerzos de dedicados investigadores, aún existen problemas que se han convertido en grandes retos científicos y que han exigido no sólo el estudio aislado a través de cada una de las ciencias naturales, sino también una metodología transdisciplinar entre ramas del conocimiento como la matemática, la física teórica y la ingeniería. Uno de estos fenómenos es el comportamiento dinámico de los fluidos reales.

Un fluido es una sustancia constituida por partículas (átomos y/o moléculas) que interactúan entre si mediante fuerzas de cohesión lo suficientemente fuertes como para mantenerlas unidas, pero a su vez lo suficientemente débiles como para permitirles gran libertad de movimiento al

interior del sistema. Debido a lo anterior los fluidos no tienen una forma definida a diferencia de los sólidos, sino que se amoldan al recipiente que los contiene. Los estados de la materia que se consideran fluidos son los líquidos, los gases y los plasmas. Los primeros tienen un volumen definido y son casi incompresibles. Los segundos no tienen un volumen definido y tienden a ocupar todo el espacio disponible (expansión); sin embargo, pueden ser comprimidos en gran medida. Los plasmas por su parte tienen características similares a los gases en ausencia de campos electromagnéticos, están constituidos de partículas cargadas eléctricamente y sus propiedades son objeto de estudio de la física de plasmas.

El estudio de los fluidos en movimiento forma parte de una rama de la ciencia conocida como la Mecánica de Fluidos e implica considerar estas sustancias como medios continuos, es decir como un sistema constituido por un gran número de partículas de modo que aun al dividirlo en partes muy pequeñas, denominadas infinitesimales, cada una de estas partes contiene un elevado número de partículas y sea posible definirse cantidades termodinámicas tales como la presión, temperatura, densidad, entropía, entre otras. Así, un fluido representa un sistema macroscópico de muchas partículas en interacción y los avances en la descripción de fluidos reales, es decir de aquellos que se mueven bajo la influencia de fuerzas de rozamiento interno (viscosidad) y/o turbulencia, podrían llevar a la comprensión

y predicción de fenómenos como el clima y las corrientes atmosféricas, las corrientes oceánicas, el movimiento del plasma al interior de las estrellas, las nebulosas, además de importantes aplicaciones en la industria aeronáutica, marítima y la ingeniería mecánica.

Los fluidos han estado presentes en el desarrollo de la biología terrestre; gracias a sus propiedades de transporte pudieron acomodar las sustancias que interactuaron para dar origen a la vida. Los diferentes compuestos químicos esenciales para la vida se distribuyeron alrededor de todo el planeta a través de corrientes atmosféricas y oceánicas, y el movimiento aleatorio de las partículas permitió definir la probabilidad que daría origen a fenómenos biológicos primitivos. Al interior y exterior de las células, los procesos de transporte de nutrientes se realizan haciendo uso de fluidos como el citoplasma, el fluido intracelular y extracelular, que permiten la distribución de sustancias químicas solubles en ellos. Los animales de todas las especies también cuentan con una serie de fluidos corporales que se encargan de distribuir y secretar nutrientes, proteínas, anticuerpos, hormonas y otras sustancias esenciales para la vida. La sangre es uno de los más importantes fluidos corporales que puede encontrarse en muchos animales, debiendo poseer ciertas propiedades fisicoquímicas adecuadas y un comportamiento mecánico bien definido.

Al comprenderse y ser conscientes de la gran importancia de los fluidos no solo para la vida, sino también para la estabilidad de muchos sistemas del Universo, se vuelve interesante centrar nuestro estudio en este fascinante cuerpo de investigación, no tanto por las aplicaciones que pudieran desprenderse de resultados obtenidos en esta área, sino por el mismo placer que nos causa como científicos e investigadores abordar terrenos no explorados para descubrir nuevos conocimientos. Es por esta razón que desde los siglos XVII y XVIII, con los estudios de Isaac Newton y Leonhard Euler sobre los fluidos ideales y por Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes sobre los fluidos viscosos, se vienen adelantando los cimientos de una nueva ciencia, que por desgracia (o fortuna para los modernos investigadores) en el siglo XIX no tuvo la importancia que se

merecía debido al florecimiento de otras teorías que se volvieron más famosas y, por buenas razones, se convirtieron en focos de atención: la relatividad y la cuántica, por ejemplo. Sin embargo, la mecánica de fluidos ha sido abordada por grandes representantes de las ciencias físicas y matemáticas; un equipo fuerte de modernos teóricos, experimentadores y empíricos de la ingeniería forman parte de importantes grupos de investigación a nivel mundial para el desarrollo de modelos teóricos que permitan describir el estado de los fluidos en movimiento y cuyos resultados puedan ser confirmados en el laboratorio.

La Naturaleza expresa sus leyes en un elegante carácter matemático. La mayoría de modelos que describen el comportamiento dinámico de los sistemas físicos se expresan como un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP's) como lo son la ecuación de onda, las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de calor o la tan famosa ecuación de Schrödinger. Por su lado, las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos viscosos, homogéneos e incompresibles se denominan ecuaciones de Navier-Stokes, un conjunto de EDP's con no linealidad obtenidas a partir de las ecuaciones de Euler para los fluidos ideales, la ley de conservación de la masa y la consideración de fuerza de rozamiento internas que afectan el comportamiento del fluido en movimiento. En una presentación general, las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma compacta lucen de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} (\Delta \mathbf{u})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Donde, $\mathbf{u}$ es el campo de velocidades del fluido, es decir la velocidad del fluido en cualquier punto, ρ y p son la densidad y la presión que actúa en cada punto del fluido respectivamente y η es una constante positiva que mide las fuerzas de fricción al interior de este, llamada coeficiente de viscosidad.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son en realidad la segunda ley de Newton aplicadas

al fluido por unidad de volumen: sumatoria de fuerzas igual a densidad por aceleración. El primer término de la derecha, $-1/\rho \nabla p$, está relacionado con la fuerza ejercida por la presión del fluido sobre sí mismo, y el segundo término, $\eta/\rho (\Delta \mathbf{u})$, está relacionado con las fuerzas de fricción que actúan al interior del fluido en movimiento (término de la viscosidad). Resulta que cuando un fluido está en movimiento y sus diferentes puntos se mueven a distinta velocidad, dicho estado no es de equilibrio y se producirán procesos que tiendan a igualar las velocidades; estos fenómenos son denominados de transporte y son mecanismos a través de los cuales alguna cantidad física es transportada de una región a otra del sistema. El caso particular de transporte de momentum lineal debido a variaciones de velocidad se denomina viscosidad y es lo que genera el término de la ecuación anteriormente descrito. El coeficiente de viscosidad dinámico η de un fluido mide la resistencia al flujo por acción de una fuerza que actúe de manera tangencial a la superficie del fluido. Por lo general los líquidos son más viscosos que los gases, es decir presentan mayor resistencia a fluir debido a la mayor cohesión de las partículas que los constituyen. La viscosidad es un parámetro que puede variar con la temperatura; los aceites para motores, por ejemplo, disminuyen su viscosidad al ser calentados.

La segunda ecuación se denomina condición de incompresibilidad y resulta de imponer la hipótesis de densidad constante ($\rho = cte$) en la ecuación de continuidad que representa la conservación de la masa en el movimiento de los fluidos.

Desde el punto de vista matemático resulta de interés abordar el problema de existencia, unicidad y regularidad de soluciones para el sistema de Navier-Stokes. En esencia, dicho problema consiste en demostrar que existe una solución (existencia), que esa solución es única (unicidad) y que es tantas veces diferenciable como la requiera la ecuación diferencial (regularidad). En este caso en particular se requiere demostrar que existe un único par solución $(\mathbf{u}, p)$ tal que $\mathbf{u}$ sea una vez derivable respecto al tiempo y dos veces derivable respecto a las coordenadas, así como que p sea una vez derivable respecto a las coordenadas.

Numerosos son los tratamientos matemáticos que se han realizado alrededor del mundo con el fin de solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes. De hecho, el problema de existencia y unicidad de soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier-Stokes se ha convertido en uno de los retos fisicomatemáticos más importantes del siglo XXI, tanto así que el Clay Mathematics Institute (CMI) ha ofrecido la suma de un millón de dólares a quien resuelva el problema en el caso tridimensional; para el caso de dos dimensiones ya fue resuelto. El campo de las matemáticas más relacionado con estos tratamientos son las Ecuaciones Diferenciales Parciales y sus herramientas han permitido describir los espacios funcionales, conjuntos de funciones, donde posiblemente residen las soluciones al problema, además de brindar los fundamentos matemáticos para el tratamiento de los sistemas de EDP's desde los puntos de vista analítico y cualitativo.

Desde el punto de vista físico, sin embargo, no resulta satisfactorio únicamente resolver el problema de existencias, unicidad y regularidad, sino que también requiere verificar la admisibilidad física de las soluciones. El estudio de la admisibilidad física de una solución se realiza gracias a los principios físicos que rigen el comportamiento del sistema (i.e. principio de conservación de la energía).

Sin embargo, por más esfuerzos que se han realizado, no se ha logrado probar la existencia de soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier-Stokes. El problema no solo radica en la dificultad que presenta la no linealidad de la ecuación diferencial, sino que los métodos clásicos para la búsqueda de soluciones a EDP's tales como separación de variables, series de potencias, métodos de transformadas, entre otros, no proporcionan los resultados deseados al ser aplicados al sistema de Navier-Stokes. La búsqueda de una solución analítica basada en la teoría clásica de funciones no ha proporcionado un camino eficiente para resolver dicho problema y ha sido necesaria la construcción y el abordaje de una teoría moderna que generalice algunos conceptos importantes como el de la derivada e incluso, el propio concepto de función. El problema entonces continúa abierto.